UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Facultad
de
Ciencias

Análisis Matemático del Deshielo

(Mathematical Analysis of Melting)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Raquel González Ruiz
Director: Rafael Granero Belinchón

Julio-2020

Agradecimientos

A mis padres, sin ellos hubiera sido imposible; a Rafa, por toda la paciencia que ha tenido conmigo durante el estado de alarma; a mis chatingas, no me imagino todos estos años sin vosotras y a mis chicos de ADE por ese año en el que volví a los orígenes.

Resumen

En este trabajo vamos a demostrar la existencia y unicidad de solución global del problema de Stefan en una dimensión. Consideraremos un bloque de hielo unidimensional que ya ha comenzado a derretirse, dando lugar a una región ocupada por agua.
El modelo matemático en el que se basa el problema de Stefan consiste en una ecuación en derivadas parciales, la Ecuación del Calor, donde el dominio, es decir, la zona ocupada por el agua, es desconocido. Es por esta razón que a estos problemas también se les conoce como problemas de frontera libre.
En primer lugar estableceremos un problema equivalente mediante un cambio de variable en el que el dominio es fijo. Posteriormente demostraremos la existencia y unicidad de solución local en tiempo para finalizar demostrando que realmente esta solución es global. Además, estudiaremos la función de la distribución de temperatura que hace que el hielo se funda.

Palabras clave: Problema de Stefan, Teorema del Punto Fijo de Banach y aplicación contractiva.

Abstract

In this work we will demonstrate the existence and uniqueness of a global solution to Stefan's problem in one dimension. We will consider a one-dimensional ice block that has already begun to melt, giving rise to a region occupied by water.
The mathematical model on which Stefan's problem is based consists of an equation in partial derivatives, the Heat Equation, where the domain, i.e. the zone occupied by the water, is unknown. It is for this reason that these problems are also known as free boundary problems.
First we will establish an equivalent problem by changing the variable where the domain is fixed. Then we will demonstrate the existence and uniqueness of a local solution in time to finish by showing that this solution is really global. In addition, we will study the function of temperature distribution that causes ice to melt.

Key words: Stefan Problem, Banach Fixed-Point Theorem and contraction mapping.

Índice general

Introducción

El problema clásico de Stefan de una fase describe la distribución de temperatura en un medio homogéneo que experimenta una transición de fase. Un ejemplo de esto es el hielo derritiéndose en agua. Esto se logra resolviendo la Ecuación del Calor en un dominio que depende del tiempo y que, a priori, es desconocido [3].
Este problema es particularmente importante en el campo de las transiciones de fase en la materia. Se asocia principalmente con problemas de fusión y solidificación. Sin embargo, existen problemas similares a Stefan que modelizan el comportamiento de fluidos en medios porosos o, incluso, el de las ondas de choque en la dinámica de gases [4].
El primer artículo conocido sobre difusión de calor en un medio con un cambio de estado de fase fue publicado por los matemáticos franceses Gabriel Lamé y Benoît Paul Émile Clayperon en 1831 [5]. No fue hasta 1889, casi 60 años más tarde, cuando el físico y matemático austriaco Josef Stefan volvió a estudiar este problema planteándolo de una forma mucho más general [4]. Publicó cuatro artículos en los que describía modelos matemáticos para problemas físicos reales con un cambio de estado de fase. Fue el primer gran estudio de este tipo de problemas por lo que desde entonces los problemas de frontera libre se conocen como problemas de Stefan.
Con el tiempo diversos matemáticos han ido mejorando las condiciones establecidas por Stefan. Por ejemplo, la existencia de solución local en tiempo para el problema de Stefan multi-dimensional fue demostrado por Frolova y Solonnikov [6].

En esta memoria vamos a considerar un bloque de hielo uni-dimensional y semi-infinito (la semirrecta $\mathbb{R}^+$) que a tiempo $t = t_0$ ya ha comenzado a derretirse. De esta forma la semirrecta queda dividida por un punto $x_1 = s_0$ en dos intervalos. El intervalo $A_1 = \{0 < x_1 < s_0\}$ está lleno de agua, mientras que el intervalo $A_2 = \{x_1 > s_0\}$ está lleno de hielo, el cual permanece a una temperatura constante de cero grados centígrados. Utilizando la terminología de este problema A_1 es la fase líquida y A_2 la fase sólida. La superficie separando estas dos fases, que en este caso particular es un punto, se conoce como interfaz y se denota por $x_1 = s(t)$. Además, asumimos que la temperatura de cambio de fase es una constante θ_0 y, dado que la temperatura es continua,

$$\theta\left(\lim_{x \searrow s(t)}, t\right) = \theta\left(\lim_{x \nearrow s(t)}, t\right) = \theta_0 \text{ para todo } t$$

En concreto, dado que estamos tratando el deshielo en nuestro caso será $\theta_0 = 0$ [2].
Por lo tanto, teniendo en cuenta esto existe un segmento $(0, s(t))$ de agua líquida. La longitud de esta zona, expresada como $s(t)$, es una función desconocida que depende del tiempo. Luego, debemos hallar tanto la distribución del calor, $u(x, t)$, como la interfaz, $s(t)$.
La distribución del calor podemos hallarla con la Ecuación del Calor, la cual debe estar definida en el intervalo del agua líquida. Por otro lado, para calcular la interfaz $s(t)$

debemos tener en cuenta que su avance o retroceso depende de la distribución del calor, $u(x,t)$, en el punto de la interfaz.
Asimismo, deben establecerse dos condiciones de borde, una para cada extremo del dominio $(0, s(t))$, ya que de lo contrario no tendríamos unicidad de solución. La primera de ellas debe fijar la temperatura de fusión que, como ya hemos indicado, en el caso del hielo es $\theta_0 = 0$. Es decir, la distribución del calor en la interfaz debe ser cero, $u(s(t), t) = 0$. La otra debe describir el flujo de calor aplicado en el inicio del bloque de hielo. En este trabajo este flujo será tomado como nulo.
Por último, se deben establecer dos condiciones iniciales, una para la ecuación de la distribución del calor y otra para la de la interfaz. A tiempo cero la longitud de hielo derretido, debe ser un número estrictamente positivo ya que hemos considerado un bloque de hielo unidimensional que ya ha comenzado a derretirse. Por otro lado, la distribución inicial de temperatura tiene que ser positiva. Esto se debe a que no tiene sentido físico que la temperatura inicial sea negativa y el hielo comience a derretirse. Además, debe estar definida en el intervalo del agua líquida incluyendo la interfaz. No obstante, estableceremos más condiciones sobre esta función que detallaremos a lo largo de la memoria.
Por consiguiente, nuestro problema es encontrar u y s tales que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}s(t) = -u_x\left(s(t),t\right) \text{ en } [0,T] \\ u_t - u_{xx} = 0 \text{ en } (0,s(t)) \times [0,T] \\ s(0) = b > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 \text{ en } [0,s(t)] \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(s(t),t) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

siendo T el periodo total de tiempo.

Esta memoria está dividida en tres Capítulos. En el primero estudiaremos el sistema (1) desde el punto de vista de la EDO y demostraremos el siguiente Teorema:

Teorema 1 *Dados $b > 0$ y $u_0(x)$ tal que*

$$\int_0^b u_0(x)dx \leq \frac{b}{5} \qquad\qquad u_0(x) < \frac{1}{15b}(b-x)$$

existe una única solución local $s \in Lip\left([0,T]\right)$ de (1) para $T \leq \frac{15b^2}{2}$.

En el caso del segundo Capítulo veremos el sistema (1) desde el punto de vista de la EDP. Es decir, estudiaremos la función de la distribución de temperatura para ver que pertenece al espacio de Sobolev $H^1 = \{f \in L^2([0,s(t)]) : f' \in L^2([0,s(t)])\}$ al probar

Teorema 2 *La solución $u(x,t)$ del sistema (1) verifica las siguientes desigualdades*

$$\begin{aligned} &\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx \leq \int_0^b u_0^2(x)dx \\ &\int_0^t \frac{1}{s(z)} \int_0^{s(z)} u_x^2(x,z)dxdz \leq \frac{1}{2b}\int_0^b u_0^2(x)dx \\ &\int_0^{s(t)} u_x^2(x,t)dx \leq \int_0^b u_x^2(x,0)dx \\ &\int_0^t s(z) \int_0^{s(z)} u_{xx}^2(x,z)dxdz \leq \frac{s(t)}{2}\int_0^b u_x^2(x,0)dx \end{aligned}$$

Por último, en el Capítulo 3 demostraremos la existencia y unicidad de solución global del sistema (1)

Teorema 3 *Bajo las hipótesis del Teorema 1 la solución del sistema* (1) *es global y, además,*

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = b + \int_0^b u_0(x)dx$$

Capítulo 1

Existencia y Unicidad de Solución Local

En este capítulo probaremos la existencia y unicidad de solución local del problema de Stefan en una dimensión, es decir, del siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}s(t) = -u_x\left(s(t),t\right) \text{ en } [0,T] \\ u_t - u_{xx} = 0 \text{ en } (0,s(t)) \times [0,T] \\ s(0) = b > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 \text{ en } [0,s(t)] \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(s(t),t) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

De manera más precisa vamos a probar

Teorema 1.1 *Dados $b > 0$ y $u_0(x)$ tal que*

$$\int_0^b u_0(x)dx \leq \frac{b}{5} \qquad\qquad u_0(x) < \frac{1}{15b}\left(b - x\right)$$

existe una única solución local $s \in Lip\left([0,T]\right)$ de (1.1) para $T \leq \frac{15b^2}{2}$.

Las hipótesis que debe cumplir $u_0(x)$ no son óptimas. Realizando un estudio más extenso del Problema de Stefan unidimensional veríamos que no son necesarias. En este Capítulo nos centraremos en el problema de Stefan desde el punto de vista de la EDO para la frontera libre. Por otro lado, será en el Capítulo 2 cuando estudiemos las propiedades de la función u.
Algunas de las herramientas de las que nos vamos a valer para la demostración son: las propiedades de las aplicaciones contractivas, esto es, las que cumplen que tanto su dominio como su imagen son el mismo espacio métrico (X,d) y, además, que existe un número real $L < 1$ y no negativo tal que para todo x, y en X

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leq Ld\left(x - y\right)$$

De la misma manera, usaremos el Teorema del Punto Fijo de Banach

Teorema 1.2 (Teorema del Punto Fijo de Banach) *Sea (X,d) un espacio métrico completo, y sea $f : X \to X$ una aplicación contractiva en X. Entonces existe un único punto fijo de f.*

Vamos a aplicar este Teorema al conjunto

$$\mathcal{O} = \{s \in C^0([0,T]) : s \text{ no decreciente}, \ s(0) = b, \ \ |s(t) - s(z)| \leq L\,|t - z| \ \text{ con } 0 \leq L \leq R\}$$

donde R es una constante fija que cumple que $u_0(x) \leq R\,(b - x)$ para todo $x \in (0, s(t))$. Podemos hacer esto porque, tomando como espacio métrico de Banach $(C^0([0,T]), ||\cdot||_\infty)$, observamos que $\mathcal{O}$ es cerrado en $C^0([0,T])$. Por un lado, se tiene que $\mathcal{O} \subset C^0([0,T])$ ya que $\mathcal{O}$ está contenido en el conjunto de funciones Lipschitz que es un subconjunto de $C^0([0,T])$. Por otro, para probar que efectivamente $\mathcal{O}$ es cerrado tenemos que comprobar que el límite de toda sucesión en $\mathcal{O}$ pertenece a $\mathcal{O}$.
Sea s_n una sucesión en $\mathcal{O}$ que converge uniformemente a s para todo t. Tenemos que probar que

- $|s(t) - s(z)| \leq M\,|t - z|$ donde $0 \leq M \leq R$
- $s\,(t + h) - s(t) \geq 0$ donde $h > 0$

Para probar lo primero vamos a hacer uso de la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |s(t) - s(z)| &\leq |s(t) - s_n(t)| + |s_n(t) - s(z)| \\ &\leq |s(t) - s_n(t)| + |s_n(t) - s_n(z)| + |s_n(z) - s(z)| \end{aligned}$$

Además, como s_n está en $\mathcal{O}$ cumple que

$$|s_n(t) - s_n(z)| \leq M_n\,|t - z|$$

donde $0 \leq M_n \leq R$, y

$$\lim_{n\to\infty} |s(t) - s_n(t)| = 0 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} |s_n(z) - s(z)| = 0$$

ya que s_n converge uniformemente a s para todo punto. Por tanto,

$$|s(t) - s(z)| \leq \sup_n M_n\,|t - z|$$

donde $\sup_n M_n \leq R$ ya que s_n está en $\mathcal{O}$.
Por otro lado, para demostrar

$$s\,(t + h) - s(t) \geq 0$$

debemos tener en cuenta que, como s_n pertenece a $\mathcal{O}$, se tiene que

$$s_n\,(t + h) - s_n(t) \geq 0$$

Luego, dado que s_n converge uniformemente a s para todo punto,

$$s\,(t + h) - s(t) = \lim_{n\to\infty} \left(s_n\,(t + h) - s_n(t)\right) \geq 0$$

Además, observamos que el Teorema del Punto Fijo de Banach también se verifica para subconjuntos cerrados de espacios completos. Esto se debe a que la demostración de este Teorema establece que para todo punto $x \in X$ la sucesión $\{x, f(x), f(f(x)), ...\}$ es una sucesión de Cauchy por ser f contractiva . Como el espacio X es completo esta sucesión converge a dicho punto x. Luego, si modificamos la condición de espacio completo por la de cerrado de un espacio completo la demostración se mantiene.

Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema del Punto Fijo de Banach al conjunto $\mathcal{O}$.

Por otro lado, por el Teorema de Rademacher sabemos que toda función en $\mathcal{O}$ posee derivada en casi todo punto de su dominio. Esto se debe a que toda función perteneciente a este conjunto es Lipstchiz. Los puntos en los que la función no es derivable forman un conjunto de medida de Lebesgue cero. En estos puntos vamos a denotar por s' al ínfimo de las L tales que cumplen $|s(t) - s(z)| \leq L\,|t - z|$ con $0 \leq L \leq R$. De esta forma conseguimos una notación compacta.

Teniendo todo esto en cuenta la aplicación a la que vamos a aplicar el Teorema del Punto Fijo es el operador

$$\mathcal{T}(s)(t) = b - \int_0^t u_x(s(z), z)dz \tag{1.2}$$

donde $T \geq t \geq 0$. Integrando la ecuación para s de (1.1) se llega a que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}s(t) = -u_x(s(t), t) \Leftrightarrow \int_0^t \frac{d}{dz}s(z)dz &= \int_0^t -u_x(s(z), z)dz \\
\Leftrightarrow s(t) - s(0) &= \int_0^t -u_x(s(z), z)dz \\
\Leftrightarrow s(t) &= b - \int_0^t u_x(s(z), z)dz
\end{aligned}$$

por lo que es fácil darse cuenta de que $s(t)$ es solución de (1.1) si y solo si $s(t) = \mathcal{T}(s)(t)$. Luego, demostrar la existencia y unicidad de solución de (1.1) es equivalente a probar que el operador (1.2) posee un único punto fijo.
Asimismo, el operador (1.2) puede ser escrito de forma equivalente sin derivadas en x como

$$\mathcal{T}(s)(t) = b + \int_0^b u(x, 0)dx - \int_0^{s(t)} u(x, t)dx \tag{1.3}$$

Para demostrar que (1.2) y (1.3) realmente son equivalentes vamos a integrar la Ecuación del Calor respecto a x y respecto a t. Debemos tener en cuenta que, como $u(s(t), t) = 0$, por la Regla de Leibniz

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} u(x, t)dx &= u(s(t), t)\frac{\partial}{\partial t}s(t) - u(0, t)\frac{\partial}{\partial t}0 + \int_0^{s(t)} \frac{\partial}{\partial t}u(x, t)dx \\
&= \int_0^{s(t)} \frac{\partial}{\partial t}u(x, t)dx
\end{aligned}$$

Luego, dado que $u_x(0, t) = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^t \int_0^{s(z)} (u_z - u_{xx})dxdz \\
&= \int_0^t \int_0^{s(z)} u_z(x, z)dxdz - \int_0^t \int_0^{s(z)} u_{xx}(x, z)dxdz \\
&= \int_0^t \frac{d}{dz}\int_0^{s(z)} u(x, z)dxdz - \int_0^t \int_0^{s(z)} u_{xx}(x, z)dxdz \\
&= \int_0^{s(t)} u(x, t)dx - \int_0^b u(x, 0)dx - \int_0^t u_x(s(z), z)dz
\end{aligned}$$

y se tiene que

$$\int_0^t u_x(s(z), z)dz = \int_0^{s(t)} u(x,t)dx - \int_0^b u(x,0)dx$$

Por otro lado, podemos demostrar que

$$u(x,t) \leq R\,(s(t) - x) \tag{1.4}$$

Para hacerlo vamos a utilizar el Principio de Comparación [1, Capítulo 6]

Teorema 1.3 (Principio de Comparación) *Sean v, w dos soluciones de*

$$v_t = v_{xx} + f \qquad\qquad w_t = w_{xx} + g$$

respectivamente, con $v(0) \geq w(0)$ y $f \geq g$. Entonces $v(x,t) \geq w(x,t)$.

Definiendo

$$p(x,t) = R\,(s(t) - x)$$

se tiene que

$$\begin{array}{ll} p_t(x,t) = p_{xx}(x,t) + Rs'(t) & \qquad u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \\ p_0(x) = R(b-x) & \qquad u_0(x) \end{array}$$

donde $Rs'(t) \geq 0$ ya que s es no decreciente al pertenecer al conjunto $\mathcal{O}$ y $R\,(b-x) \geq u_0(x)$ por hipótesis. Además, comparando las condiciones de borde de $u(x,t)$ con sus equivalentes en la función $p(x,t)$, vemos que se sigue cumpliendo que $p(x,t) \geq u(x,t)$

$$\begin{array}{ll} p_x(x,0) = R & \qquad u_x(x,0) = 0 \\ p(s(t),t) = 0 & \qquad u(s(t),t) = 0 \end{array}$$

No obstante, antes de empezar con la prueba del Teorema 1.1 debemos fijarnos en que, aunque (1.1) parece ser un sistema lineal ya que todas sus ecuaciones lo son, el dominio de la ecuación del calor $(0, s(t))$ es desconocido. Para solucionar esto haremos el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{x}{s(t)}$$

con el que se tiene que $v(y,t) = u(ys(t), t)$. De esta forma el dominio de la ecuación del calor que hasta el momento era desconocido pasa a ser un dominio fijo, $(0,1)$. Además, el sistema (1.1) para a ser

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}s(t) = -\frac{1}{s(t)}v_y(1,t) \text{ en } [0,T] \\ v_t(y,t) - \frac{1}{s^2(t)}v_{yy}(y,t) - \frac{s'(t)}{s(t)}yv_y(y,t) = 0 \text{ en } (0,1)\times[0,T] \\ s(0) = b > 0 \\ v(y,0) = u_0(yb) \geq 0 \text{ en } [0,1] \\ v_y(0,t) = 0 \\ v(1,t) = 0 \end{cases}$$

el cual no es lineal. Es decir, la no linealidad de (1.1) estaba escondida en que el dominio de la ecuación del calor era desconocido.

Por lo tanto, tenemos que escribir el operador $\mathcal{T}(s)$ en términos de v. En el caso de (1.2) este pasa a ser

$$\mathcal{T}(s)(t) = b - \int_0^t \frac{1}{s(z)} v_y(1, z) dz$$

mientras que en el caso de (1.3) se transforma en

$$\mathcal{T}(s)(t) = b + b \int_0^1 v(y, 0) dy - s(t) \int_0^1 v(y, t) dy$$

1.1. Prueba del Teorema

En esta sección vamos a probar que $\mathcal{T}$ cumple las hipótesis del Teorema del Punto Fijo de Banach con lo que el Teorema 1.1 quedará demostrado. Por un lado, vamos a probar que $\mathcal{T} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ y, por otro, que $\mathcal{T}$ es una aplicación contractiva entre los conjuntos $\mathcal{O}$.

En primer lugar observamos que dada s,

$$v_t(y, t) dy - \frac{1}{s^2(t)} v_{yy}(y, t) - \frac{s'(t)}{s(t)} y v_y(y, t) = 0 \tag{1.5}$$

es una ecuación parabólica lineal de coeficientes variables que tiene solución y esta es única [1, Capítulo 7]. Ahora vamos a calcular una cota de t que cumpla que $s(t)$ pertenece a $\left[b, \frac{3b}{2}\right]$. Para ello vamos a utilizar que para todo s en $\mathcal{O}$

- s es no decreciente
- $s(0) = b > 0$
- $|s(t) - s(z)| \leq L \, |t - z|$ con $0 \leq L \leq R$

La cota inferior se tiene porque $s(0) = b$ y s es no decreciente. Mientras que la cota superior se saca de que

$$s(t) = s(t) - s(0) + s(0) \leq b + |s(t) - s(0)| \leq b + Rt$$

Por lo tanto, tomando

$$t \leq T = \frac{b}{2R} \tag{1.6}$$

donde R es la constante que aparece en la definición de $\mathcal{O}$ y que determinaremos a lo largo de la sección, llegamos a que

$$b \leq s(t) \leq \frac{3b}{2}$$

1.1.1. Demostración $\mathcal{T} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$

En este apartado vamos a demostrar que $\mathcal{T} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$. Es decir, vamos a probar que $\mathcal{T}(s)$ pertenece a

$$\mathcal{O} = \{s \in C^0([0,T]) : s \text{ no decreciente, } s(0) = b,\ |s(t) - s(z)| \leq L|t-z| \text{ con } 0 \leq L \leq R\}$$

Asumimos que $t, z \leq T$ con T definido en (1.6). Luego s pertenece a $\left[b, \frac{3b}{2}\right]$. Además, dado que es trivial que $\mathcal{T}(s)(0) = b$, para concluir que $\mathcal{T}(s) \in \mathcal{O}$ lo que tenemos que ver es que $\mathcal{T}(s)$ es no decreciente y que

$$|\mathcal{T}(s)(t) - \mathcal{T}(s)(z)| \leq L|t-z|$$

con $0 \leq L \leq R$.

Comencemos demostrando que

$$\mathcal{T}(s)(t) = b + b\int_0^1 v(y,0)dy - s(t)\int_0^1 v(y,t)dy$$

es Lipschitz respecto a t y que su constante Lipschitz es menor que R. Para ello debemos ver que

$$\left|s(z)\int_0^1 v(y,z)dy - s(t)\int_0^1 v(y,t)dy\right| \leq L|t-z| \tag{1.7}$$

donde $0 \leq L \leq R$. Para empezar, introduzcamos

$$s(t)\int_0^1 v(y,z)dy$$

como término cruzado llegando a que

$$\begin{aligned}
&s(z)\int_0^1 v(y,z)dy - s(t)\int_0^1 v(y,t)dy \\
&= (s(z)-s(t))\int_0^1 v(y,z)dy + s(t)\left(\int_0^1 v(y,z)dy - \int_0^1 v(y,t)dy\right)
\end{aligned}$$

Luego, tomando valores absolutos y teniendo en cuenta que la constante Lipschitz de s es $\hat{L}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
A &= \left|(s(z)-s(t))\int_0^1 v(y,z)dy + s(t)\left(\int_0^1 v(y,z)dy - \int_0^1 v(y,t)dy\right)\right| \\
&\leq |s(z)-s(t)|\left|\int_0^1 v(y,z)dy\right| + |s(t)|\left|\int_0^1 v(y,z)dy - \int_0^1 v(y,t)dy\right| \\
&\leq \hat{L}|t-z|\int_0^1 v(y,z)dy + s(t)\left|\int_0^1 v(y,z)dy - \int_0^1 v(y,t)dy\right|
\end{aligned}$$

donde $0 \leq \hat{L} \leq R$. Por lo tanto, debemos ver que

$$\left|\int_0^1 v(y,z)dy - \int_0^1 v(y,t)dy\right| \leq \tilde{L}|t-z|$$

Para ello estudiaremos la Ecuación del Calor en términos de v, es decir, (1.5). Integraremos esta ecuación respecto a y para luego convertirla en una desigualdad.
Integrando por partes (1.5)

$$\int_0^1 v_t(y,t)dy - \frac{1}{s^2(t)}v_y(1,t) + \frac{1}{s^2(t)}v_y(0,t) - \frac{s'(t)}{s(t)}\left(yv(y,t)\Big|_0^1 - \int_0^1 v(y,t)dy \right) = 0$$

Además, teniendo en cuenta la Regla de Leibniz y que $v(1,t) = v_y(0,t) = 0$ se tiene que

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 v(y,t)dy - \frac{1}{s^2(t)}v_y(1,t) + \frac{s'(t)}{s(t)}\int_0^1 v(y,t)dy = 0 \tag{1.8}$$

Ahora tenemos que transformar (1.8) en una desigualdad, para ello nos fijamos en que

$$-\frac{1}{s(t)}v_y(1,t) = -u_x(s(t),t)$$

por lo que si demostramos que $-u_x(s(t),t) > 0$ ya tendremos la desigualdad que buscamos ya que se tendrá que

$$-\frac{1}{s^2(t)}v_y(1,t) > 0$$

Para demostrar esto vamos a utilizar el siguiente Lema [1, Capítulo 6], [2, Apéndice A]

Lema 1.1 (Lema de Hopf) *Sea Q_T un abierto de $\mathbb{R}^2$ encerrado en $(0,L)\times(0,T)$ donde $T > 0$. Sea $f(x,t)$ una función definida en Q_T tal que $\mathcal{L}f(x,t) = 0$ donde $\mathcal{L}$ es un operador parabólico. Además, esta función f alcanza su máximo en un punto*

$$(\bar{x},\bar{t}) \in \partial Q_T = \overline{Q_T} - Q^*$$

donde ∂Q_T es la frontera parabólica de Q_T y $Q_T^* = (0,L)\times(0,T]$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} > 0$$

Tomando $\mathcal{L} = \partial_x^2 - \partial_t$ y $f(x,t) = -u(x,t)$ se tiene que

$$\mathcal{L}f(x,t) = \partial_t u - \partial_x^2 u = 0$$

Además, $f(x,t) = -u(x,t) \leq 0$ ya que es trivial observar que $u(x,t)$ es una función positiva utilizando el Principio de Comparación. Por tanto, el punto de borde $u(s(t),t) = 0 = -u(s(t),t)$ es máximo. Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} > 0 \tag{1.9}$$

En consecuencia, (1.8) se transforma en

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 v(y,t)dy \leq -\frac{s'(t)}{s(t)}\int_0^1 v(y,t)dy$$

Aplicando la Desigualdad de Grönwall conseguimos la siguiente cota

$$\int_0^1 v(y,t)dy \leq \exp\left(-\int_z^t \frac{s'(w)}{s(w)}dw\right)\int_0^1 v(y,z)dy \tag{1.10}$$

Observamos que

$$\exp\left(-\int_z^t \frac{s'(w)}{s(w)}dw\right) = \exp\left(\log\left(\frac{s(z)}{s(t)}\right)\right) = \frac{s(z)}{s(t)} \tag{1.11}$$

Haciendo uso de (1.11) en (1.10) llegamos a

$$\int_0^1 v(y,t)dy \leq \frac{s(z)}{s(t)}\int_0^1 v(y,z)dy \tag{1.12}$$

Como (1.12) se tiene para todo punto, tomando $z = 0$

$$\int_0^1 v(y,t)dy \leq \frac{s(0)}{s(t)}\int_0^1 v(y,0)dy \leq \int_0^1 v(y,0)dy \tag{1.13}$$

Restando $\int_0^1 v(y,z)dy$ a ambos lados de (1.12)

$$\int_0^1 v(y,t)dy - \int_0^1 v(y,z)dy \leq \int_0^1 v(y,z)dy\left(\frac{s(z)}{s(t)} - 1\right) \tag{1.14}$$

y dividiendo entre $t - z$ a ambos lados de (1.14) llegamos a

$$\left(\int_0^1 v(y,t)dy - \int_0^1 v(y,z)dy\right)\frac{1}{t-z} \leq \int_0^1 v(y,z)dy\left(\frac{s(z)}{s(t)} - 1\right)\frac{1}{t-z}$$

Utilizando (1.13)

$$\left(\int_0^1 v(y,t)dy - \int_0^1 v(y,z)dy\right)\frac{1}{t-z} \leq \int_0^1 v(y,0)dy\left(\frac{s(z)}{s(t)} - 1\right)\frac{1}{t-z}$$

Además, tomando valores absolutos y teniendo en cuenta que $s \in \mathcal{O}$ y al conjunto $\left[b, \frac{3b}{2}\right]$ observamos que

$$\left|\frac{s(z)}{s(t)} - 1\right|\frac{1}{|t-z|} = \frac{|s(z)-s(t)|}{|t-z|}\frac{1}{s(t)} \leq \frac{R}{b}$$

Por tanto,

$$\left|\int_0^1 v(y,t)dy - \int_0^1 v(y,z)dy\right|\frac{1}{|t-z|} \leq \frac{R}{b}\int_0^1 v(y,0)dy$$

y queda demostrado que

$$\left|\int_0^1 v(y,t)dy - \int_0^1 v(y,z)dy\right| \leq \tilde{L}|t-z| \tag{1.15}$$

con

$$\tilde{L} = \frac{R}{b}\int_0^1 v(y,0)dy$$

Volviendo a la prueba de (1.7) y utilizando (1.15) llegamos a que

$$A \leq |t-z|\left(\hat{L}\int_0^1 v(y,z)dy + s(t)\tilde{L}\right)$$

Haciendo uso de (1.13) y teniendo en cuenta que $\hat{L} \leq R$

$$\hat{L}\int_0^1 v(y,z)dy + s(t)\tilde{L} \leq R\int_0^1 v(y,0)dy + \frac{3R}{2}\int_0^1 v(y,0)dy$$

Luego, queda demostrado que

$$|\mathcal{T}(s)(t) - \mathcal{T}(s)(z)| \leq L|t-z|$$

con

$$L = \frac{5R}{2}\int_0^1 v(y,0)dy$$

Además, dado que $0 \leq L \leq R$, se tiene que cumplir que

$$\int_0^1 v(y,0)dy \leq \frac{2}{5}$$

Sin más que usar las condiciones del Teorema 1.1 para $u_0(x)$ y el cambio de variables vemos que $v_0(y)$ satisface la condición anterior. Luego queda demostrado que $\mathcal{T}$ es Lipschitz respecto a t y que su constante L es menor que R.

Por último, tenemos que demostrar que $\mathcal{T}$ es no decreciente. Para ello vamos a ver que la derivada del operador $\mathcal{T}$ es mayor a cero.
Derivando el operador $\mathcal{T}$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}(s)(t) = -\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{1}{s(z)}v_y(1,z)dz = -\frac{1}{s(t)}v_y(1,t)$$

Luego por el Lema de Hopf, (1.9), sabemos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}(s)(t) = -\frac{1}{s(t)}v_y(1,t) = -u_x(s(t),t) > 0$$

Por tanto, $\mathcal{T}(s)$ es creciente.

En consecuencia, dado que acabamos de probar que $\mathcal{T}(s)$ es no decreciente y Lipschitz respecto a t con constante menor a R, queda demostrado que $\mathcal{T} \in \mathcal{O}$.

1.1.2. Demostración $\mathcal{T}$ contractiva

En esta subsección vamos a probar que $\mathcal{T}$ es una aplicación contractiva entre los conjuntos $\mathcal{O}$. De esta forma quedará demostrada la existencia y unicidad de solución local del sistema (1.1), es decir, del Problema de Stefan unidimensional.
Para ver que $\mathcal{T}$ es una aplicación contractiva entre los conjuntos $\mathcal{O}$ debemos probar que

$$||\mathcal{T}(s) - \mathcal{T}(\mathcal{S})||_\infty \leq K||s - \mathcal{S}||_\infty \tag{1.16}$$

donde $K < 1$ y $s(t), \mathcal{S}(t) \in \mathcal{O}$. Además, tanto s como $\mathcal{S}$ pertenecen al conjunto $\left[b, \frac{3b}{2}\right]$ para todo $0 \leq t \leq T$.
Sabemos que

$$\mathcal{T}(s)(t) = b + b\int_0^1 v(y,0)dy - s(t)\int_0^1 v(y,t)dy$$

y que

$$\mathcal{T}(\mathcal{S})(t) = b + b\int_0^1 \mathcal{V}(y,0)dy - \mathcal{S}(t)\int_0^1 \mathcal{V}(y,t)dy$$

donde $\mathcal{V}(y,t)$ es solución de

$$\begin{cases} \mathcal{V}_t(y,t) - \frac{1}{\mathcal{S}(t)^2}\mathcal{V}_{yy}(y,t) - \frac{\mathcal{S}'(t)}{\mathcal{S}(t)}y\mathcal{V}_y(y,t) = 0 \text{ en } (0,1)\times[0,T] \\ \mathcal{V}(y,0) = u_0(yb) \geq 0 \text{ en } [0,1] \\ \mathcal{V}_y(0,t) = 0 \\ \mathcal{V}(1,t) = 0 \end{cases}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en la demostración de (1.4) pero tomando en este caso $p(x,t) = R(\mathcal{S}(t) - x)$ llegamos a que

$$\mathcal{U}(x,t) \leq R(\mathcal{S}(t) - x) \tag{1.17}$$

donde $\mathcal{U}(x,t)$ es equivalente a $\mathcal{V}(y,t)$ tomando $y = \frac{x}{\mathcal{S}(t)}$. Por tanto, haciendo este cambio de variable en (1.4) y en (1.17) se tiene que

$$v(y,t) \leq Rs(t)(1-y) \qquad\qquad \mathcal{V}(y,t) \leq R\mathcal{S}(t)(1-y) \tag{1.18}$$

No podemos suponer $s(t) < \mathcal{S}(t)$ ni $\mathcal{S}(t) < s(t)$ para todo t, es por esta razón que vamos a introducir la siguiente notación

- $\text{mín}\{s(t), \mathcal{S}(t)\} = s(t)$

$$\begin{array}{ccc} u(x,t) = \underline{u}(x,t) & v(y,t) = \underline{\alpha}(y,t) & s(t) = \underline{\beta}(t) \\ \mathcal{U}(x,t) = \overline{u}(x,t) & \mathcal{V}(y,t) = \overline{\alpha}(y,t) & \mathcal{S}(t) = \overline{\beta}(t) \end{array}$$

- $\text{máx}\{s(t), \mathcal{S}(t)\} = s(t)$

$$\begin{array}{ccc} u(x,t) = \overline{u}(x,t) & v(y,t) = \overline{\alpha}(y,t) & s(t) = \overline{\beta}(t) \\ \mathcal{U}(x,t) = \underline{u}(x,t) & \mathcal{V}(y,t) = \underline{\alpha}(y,t) & \mathcal{S}(t) = \underline{\beta}(t) \end{array}$$

De esta forma, $\overline{\beta}, \underline{\beta} \in \left[b, \frac{3b}{2}\right]$ para todo $t \leq T$. Por otro lado, (1.4) y (1.17) pasan a ser

$$\underline{u}(x,t) \leq R\left(\underline{\beta}(t) - x\right) \qquad\qquad \overline{u}(x,t) \leq R\left(\overline{\beta}(t) - x\right) \tag{1.19}$$

y (1.18) pasa a ser

$$\underline{\alpha}(y,t) \leq R\underline{\beta}(t)(1-y) \qquad\qquad \overline{\alpha}(y,t) \leq R\overline{\beta}(t)(1-y) \tag{1.20}$$

Además, definimos

$$m(t) = \frac{\text{mín}\{s(t), \mathcal{S}(t)\}}{\text{máx}\{s(t), \mathcal{S}(t)\}} = \frac{\underline{\beta}(t)}{\overline{\beta}(t)}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} ||\mathcal{T}(s) - \mathcal{T}(\mathcal{S})||_\infty &= ||\mathcal{T}(\underline{\beta}) - \mathcal{T}(\overline{\beta})||_\infty \\ &= \left|\left|\overline{\beta}(t)\int_0^1 \overline{\alpha}(y,t)dy - \underline{\beta}(t)\int_0^1 \underline{\alpha}(y,t)dy\right|\right|_\infty \end{aligned}$$

Introduciendo

$$\underline{\beta}\int_0^1 \overline{\alpha}(y,t)dy$$

como término cruzado y haciendo uso de la desigualdad triangular llegamos a que

$$\begin{aligned}||\mathcal{T}\left(\underline{\beta}\right)-\mathcal{T}\left(\overline{\beta}\right)||_\infty &= \left|\left|\left(\overline{\beta}(t)-\underline{\beta}(t)\right)\int_0^1 \overline{\alpha}(y,t)dy+\underline{\beta}(t)\left(\int_0^1 \overline{\alpha}(y,t)dy-\int_0^1 \underline{\alpha}(y,t)dy\right)\right|\right|_\infty \\ &\le \left|\left|\left(\overline{\beta}-\underline{\beta}\right)\int_0^1 \overline{\alpha}(y,t)dy\right|\right|_\infty+\left|\left|\underline{\beta}\left(\int_0^1 \overline{\alpha}(y,t)dy-\int_0^1 \underline{\alpha}(y,t)dy\right)\right|\right|_\infty\end{aligned}$$

Por (1.13) sabemos que

$$\int_0^1 \mathcal{V}(y,t)dy \le \int_0^1 \mathcal{V}_0(y)dy$$

ya que todas las cotas de v se tiene también para $\mathcal{V}$ por satisfacer la misma ecuación para $\mathcal{S}(t)$ y las mismas condiciones iniciales y de frontera. Además,

$$v_0(y)=\mathcal{V}_0(y)=u_0(yb)$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 \overline{\alpha}(y,t)dy=\int_0^1 \underline{\alpha}(y,t)dy=\int_0^1 v_0(y)dy \tag{1.21}$$

En consecuencia, haciendo uso de (1.21) y de la cota superior de $\underline{\beta}$ se tiene que

$$||\mathcal{T}(\underline{\beta})-\mathcal{T}(\overline{\beta})||_\infty \le ||\overline{\beta}-\underline{\beta}||_\infty\int_0^1 v_0(y)dy+\frac{3b}{2}\left|\left|\int_0^1\left(\overline{\alpha}(y,t)-\underline{\alpha}(y,t)\right)dy\right|\right|_\infty$$

Esto significa que debemos probar que

$$\left|\left|\int_0^1\left(\overline{\alpha}(y,t)-\underline{\alpha}(y,t)\right)dy\right|\right|_\infty \le \hat{K}\left|\left|\overline{\beta}-\underline{\beta}\right|\right|_\infty \tag{1.22}$$

donde

$$\int_0^1 v_0(y)dy+\frac{3b}{2}\hat{K}<1$$

Para empezar, definimos

$$\delta u(x,t)=\overline{u}(x,t)-\underline{u}(x,t)$$

Sabemos que los sistemas de los que son solución $\overline{u}(x,t)$ y $\underline{u}(x,t)$ son

$$\begin{aligned}&u_t(x,t)-u_{xx}(x,t)=0 &\qquad& \mathcal{U}_t(x,t)-\mathcal{U}_{xx}(x,t)=0\\ &u(s(t),t)=0 && \mathcal{U}(\mathcal{S}(t),t)=0\\ &u(x,0)=u_0(x) && \mathcal{U}(x,0)=u_0(x)\\ &u_x(0,t)=0 && \mathcal{U}_x(0,t)=0\end{aligned}$$

y que sus respectivas Ecuaciones del Calor se extienden como cero fuera de $[0,s(t)]$ y $[0,\mathcal{S}(t)]$ respectivamente ya que es la temperatura a la que permanece el hielo hasta que se funde completamente. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\delta u\left(\underline{\beta}(t),t\right)&=\overline{u}\left(\underline{\beta}(t),t\right)-\underline{u}\left(\underline{\beta}(t),t\right)\\ &=\overline{u}\left(\underline{\beta}(t),t\right)\end{aligned}$$

ya que $\underline{u}\left(\underline{\beta}(t),t\right)$ es $u(s(t),t)$ ó $\mathcal{U}(\mathcal{S}(t),t)$. Además, por (1.19) se tiene que

$$\delta u\left(\underline{\beta}(t),t\right)=\overline{u}\left(\underline{\beta}(t),t\right)\leq R\left(\overline{\beta}(t)-\underline{\beta}(t)\right)$$

Por el Principio del Máximo aplicado a δu en el intervalo $\left[0,\underline{\beta}(t)\right]$ se tiene que esta alcanza su máximo en $x=0$ ó en $x=\underline{\beta}(t)$. Sin embargo, por el Lema de Hopf sabemos que si lo alcanzara en $x=0$, $-u_x(0,t)$ debería tener signo. No obstante, por una de las condiciones de frontera del sistema (1.1) se tiene que

$$-u_x(0,t)=0$$

Luego, δu alcanza su máximo en $x=\underline{\beta}(t)$. En consecuencia,

$$\max_{0\leq x\leq\underline{\beta}(t)}\delta u(x,t)=\delta u(\underline{\beta}(t),t)\leq R\left(\overline{\beta}(t)-\underline{\beta}(t)\right) \tag{1.23}$$

Para escribir (1.23) en términos de $\overline{\alpha}(y,t)$ y de $\underline{\alpha}(y,t)$ tenemos que hacer el cambio de variable

$$x=y\overline{\beta}(t)$$

De esta forma

$$\begin{aligned}\overline{u}\left(\overline{\beta}(t)y,t\right)&=\overline{\alpha}(y,t)\\ \underline{u}\left(y\overline{\beta}(t),t\right)&=\underline{\alpha}\left(y\frac{\overline{\beta}(t)}{\underline{\beta}(t)},t\right)=\underline{\alpha}\left(\frac{y}{m(t)},t\right)\end{aligned}$$

y, además, se tiene que $0\leq y\leq m(t)$. Luego,

$$\max_{0\leq y\leq m(t)}\left(\overline{\alpha}(y,t)-\underline{\alpha}\left(\frac{y}{m(t)},t\right)\right)\leq R\left(\overline{\beta}(t)-\underline{\beta}(t)\right) \tag{1.24}$$

Una vez conocida esta cota podemos volver a la prueba de (1.22).
Teniendo en cuenta que $[0,1]=[0,m(t)]\cup[m(t),1]$ y utilizando la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}\left|\left|\int_0^1\left(\overline{\alpha}(y,t)-\underline{\alpha}(y,t)\right)dy\right|\right|_\infty&=\left|\left|\int_{m(t)}^1\left(\overline{\alpha}(y,t)-\underline{\alpha}(y,t)\right)dy+\int_0^{m(t)}\left(\overline{\alpha}(y,t)-\underline{\alpha}(y,t)\right)dy\right|\right|_\infty\\ &\leq\left|\left|\int_{m(t)}^1\left(\overline{\alpha}(y,t)-\underline{\alpha}(y,t)\right)dy\right|\right|_\infty+\left|\left|\int_0^{m(t)}\left(\overline{\alpha}(y,t)-\underline{\alpha}(y,t)\right)dy\right|\right|_\infty\\ &=I+II\end{aligned}$$

Comencemos calculando una cota de I

$$I=\left|\left|\int_{m(t)}^1\left(\overline{\alpha}(y,t)-\underline{\alpha}(y,t)\right)dy\right|\right|_\infty\leq\left|\left|(1-m(t))\max_{m(t)\leq y\leq 1}\left(\overline{\alpha}(y,t)-\underline{\alpha}(y,t)\right)\right|\right|_\infty$$

Utilizando la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}I&\leq\left|\left|\left(1-\frac{\underline{\beta}}{\overline{\beta}}\right)\max_{m(t)\leq y\leq 1}\left|\overline{\alpha}(y,t)-\underline{\alpha}(y,t)\right|\right|\right|_\infty\\ &\leq\left|\left|\frac{1}{\overline{\beta}(t)}\left(\overline{\beta}(t)-\underline{\beta}(t)\right)\max_{m(t)\leq y\leq 1}\left(\left|\overline{\alpha}(y,t)\right|+\left|\underline{\alpha}(y,t)\right|\right)\right|\right|_\infty\end{aligned}$$

Haciendo uso de (1.20) y de las cotas inferior y superior de $\overline{\beta}$ y $\underline{\beta}$

$$\begin{aligned}
I &\leq \left|\left|\left(\overline{\beta}(t) - \underline{\beta}(t)\right) \frac{R}{b} \left(\frac{3b}{2} + \frac{3b}{2}\right)\right|\right|_{\infty} \\
&\leq 3R\left|\left|\overline{\beta} - \underline{\beta}\right|\right|_{\infty}
\end{aligned}$$

Calculemos ahora la cota para II. Empecemos introduciendo $\underline{\alpha}\left(\frac{y}{m(t)}, t\right)$ como término cruzado y haciendo uso de la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
II &= \left|\left|\int_0^{m(t)} (\overline{\alpha}(y,t) - \underline{\alpha}(y,t))dy\right|\right|_{\infty} \\
&= \left|\left|\int_0^{m(t)} \left(\overline{\alpha}(y,t) - \underline{\alpha}\left(\frac{\overline{\beta}}{\underline{\beta}}y, t\right) + \underline{\alpha}\left(\frac{\overline{\beta}}{\underline{\beta}}y, t\right) - \underline{\alpha}(y,t)\right) dy\right|\right|_{\infty} \\
&\leq \left|\left|\int_0^{m(t)} \left(\overline{\alpha}(y,t) - \underline{\alpha}\left(\frac{\overline{\beta}}{\underline{\beta}}y, t\right)\right) dy\right|\right|_{\infty} + \left|\left|\int_0^{m(t)} \left(\underline{\alpha}\left(\frac{\overline{\beta}}{\underline{\beta}}y, t\right) - \underline{\alpha}(y,t)\right) dy\right|\right|_{\infty} \\
&= II_1 + II_2
\end{aligned}$$

Utilizando (1.24) y teniendo en cuenta que $m(t) \leq 1$ para todo t

$$\begin{aligned}
II_1 &= \left|\left|\int_0^{m(t)} \left(\overline{\alpha}(y,t) - \underline{\alpha}\left(\frac{\overline{\beta}}{\underline{\beta}}y, t\right)\right) dy\right|\right|_{\infty} \\
&\leq \left|\left|\int_0^{m(t)} R(\overline{\beta}(t) - \underline{\beta}(t))dy\right|\right|_{\infty} \\
&\leq R\left|\left|\overline{\beta}(t) - \underline{\beta}(t)\right|\right|_{\infty}
\end{aligned}$$

Por otro lado, para la cota de II_2 vamos a introducir un término cruzado además de realizar el siguiente cambio de variable

$$y = m(t)z$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
II_2 &= \left|\left|\int_0^{m(t)} \left(\underline{\alpha}\left(\frac{\overline{\beta}}{\underline{\beta}}y, t\right) - \underline{\alpha}(y,t)\right) dy\right|\right|_{\infty} \\
&= \left|\left|m(t)\int_0^1 \underline{\alpha}(z,t)dz - \int_0^{m(t)} \underline{\alpha}(y,t)dy\right|\right|_{\infty} \\
&= \left|\left|m(t)\int_0^1 \underline{\alpha}(z,t)dz - \int_0^{m(t)} \underline{\alpha}(y,t)dy \pm \int_{m(t)}^1 \underline{\alpha}(z,t)dz\right|\right|_{\infty}
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\int_0^1 \underline{\alpha}(z,t)dz = \int_{m(t)}^1 \underline{\alpha}(z,t)dz + \int_0^{m(t)} \underline{\alpha}(z,t)dz \tag{1.25}$$

Por tanto, utilizando (1.25) y la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
II_2 &= \left|\left| m(t)\int_0^1 \underline{\alpha}(z,t)dz - \int_0^1 \underline{\alpha}(z,t)dz + \int_{m(t)}^1 \underline{\alpha}(z,t)dz \right|\right|_\infty \\
&= \left|\left| (m(t)-1)\int_0^1 \underline{\alpha}(z,t)dz + \int_{m(t)}^1 \underline{\alpha}(z,t)dz \right|\right|_\infty \\
&\leq \left|\left| |1-m(t)|\int_0^1 \underline{\alpha}(z,t)dz \right|\right|_\infty + \left|\left| \int_{m(t)}^1 \underline{\alpha}(z,t)dz \right|\right|_\infty
\end{aligned}$$

Haciendo uso de (1.21), (1.20) y de las cotas inferior y superior de $\underline{\beta}(t)$, $\overline{\beta}(t)$ y $m(t)$

$$\begin{aligned}
II_2 &\leq \left|\left| |1-m(t)|\int_0^1 v_0(z)dz \right|\right|_\infty + \left|\left| R\underline{\beta}(1-m(t))\int_{m(t)}^1 dz \right|\right|_\infty \\
&\leq \left|\left| \frac{1}{\overline{\beta}(t)}\left(\overline{\beta}(t)-\underline{\beta}(t)\right)\int_0^1 v_0(z)dz \right|\right|_\infty + \left|\left| R\underline{\beta}(t)\frac{1}{\overline{\beta}(t)}\left(\overline{\beta}(t)-\underline{\beta}(t)\right)(1-m(t)) \right|\right|_\infty \\
&\leq \left|\left|\overline{\beta}(t)-\underline{\beta}(t)\right|\right|_\infty \frac{1}{b}\int_0^1 v_0(z)dz + R\left|\left|\overline{\beta}(t)-\underline{\beta}(t)\right|\right|_\infty \\
&\leq \left|\left|\overline{\beta}(t)-\underline{\beta}(t)\right|\right|_\infty \left(\frac{1}{b}\int_0^1 v_0(z)dz + R\right)
\end{aligned}$$

Por consiguiente, recolectando las cotas de I, II_1 y II_2 llegamos a que

$$\begin{aligned}
\left|\left| \int_0^1 (\overline{\alpha}(y,t)-\underline{\alpha}(y,t))dy \right|\right|_\infty &\leq \left|\left|\overline{\beta}-\underline{\beta}\right|\right|_\infty \left(3R + R + \frac{1}{b}\int_0^1 v_0(z)dz + R\right) \\
&\leq \left|\left|\overline{\beta}-\underline{\beta}\right|\right|_\infty \left(5R + \frac{1}{b}\int_0^1 v_0(z)dz\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, volviendo a la prueba de (1.16)

$$\begin{aligned}
\left|\left|\mathcal{T}(\underline{\beta})-\mathcal{T}(\overline{\beta})\right|\right|_\infty &\leq \left|\left|\overline{\beta}-\underline{\beta}\right|\right|_\infty \int_0^1 v_0(y)dy + \frac{3b}{2}\left|\left|\overline{\beta}-\underline{\beta}\right|\right|_\infty \left(5R + \frac{1}{b}\int_0^1 v_0(z)dz\right) \\
&\leq \left|\left|\overline{\beta}-\underline{\beta}\right|\right|_\infty \left(\frac{5}{2}\int_0^1 v_0(y)dy + \frac{15bR}{2}\right)
\end{aligned}$$

Por hipótesis del Teorema 1.1 se tiene que

$$K = \frac{5}{2}\int_0^1 v_0(y)dy + \frac{15bR}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{15bR}{2}$$

Luego, para que se tenga que $K < 1$ se debe cumplir que

$$R < \frac{1}{15b} \tag{1.26}$$

De esta forma, en términos de s y $\mathcal{S}$

$$\left|\left|\mathcal{T}(s)-\mathcal{T}(\mathcal{S})\right|\right|_\infty \leq K\left|\left|s-\mathcal{S}\right|\right|_\infty$$

con lo que queda demostrado que $\mathcal{T}$ es una aplicación contractiva.
Por otro lado, teniendo en cuenta (1.26)

$$T = \frac{b}{2R} \geq \frac{15b^2}{2}$$

por lo que el Teorema 1.1 queda demostrado para $T \geq \frac{15b^2}{2}$.

Capítulo 2

Regularidad de la función u

En este capítulo vamos a estudiar la regularidad de la función $u(x,t)$ para demostrar que pertenece al espacio de Sobolev $H^1 = \{f \in L^2([0,s(t)]) : f' \in L^2([0,s(t)])\}$.
El sistema de EDP's del que es solución u es

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} = 0 \text{ en } (0,s(t)) \times [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 \text{ en } [0,s(t)] \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(s(t),t) = 0 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Realizando el cambio de variable $y = \frac{x}{s(t)}$ en (2.1) se llega al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t(y,t) - \frac{1}{s(t)^2} v_{yy}(y,t) - \frac{s'(t)}{s(t)} y v_y(y,t) = 0 \text{ en } (0,1) \times [0,T] \\ v(y,0) = u_0(yb) \geq 0 \text{ en } [0,1] \\ v_y(0,t) = 0 \\ v(1,t) = 0 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

el cual es equivalente a (2.1) y además posee un dominio fijo. Por lo tanto, demostrar que

$$v(y,t) \in H^1 = \{f \in L^2([0,1]) : f' \in L^2([0,1])\}$$

supone demostrar que

$$u(x,t) \in H^1 = \{f \in L^2([0,s(t)]) : f' \in L^2([0,s(t)])\}$$

ya que las estimaciones que se tengan para la función $v(y,t)$ también se tendrán para la función $u(x,t)$ realizando este cambio de variable.
En concreto vamos a demostrar

Teorema 2.1 *La solución $v(y,t)$ del sistema (2.2) verifica las siguientes desigualdades*

$$\int_0^1 v^2(y,t)dy \leq \frac{b}{s(t)} \int_0^1 v^2(y,0)dy$$
$$\int_0^t \frac{1}{s^2(z)} \int_0^1 v_y^2(y,z)dydz \leq \frac{1}{2} \int_0^1 v^2(y,0)dy$$
$$\int_0^1 v_y^2(y,t)dy \leq \frac{s(t)}{b} \int_0^1 v_y^2(y,0)dy$$
$$\int_0^t \frac{1}{s^2(z)} \int_0^1 v_{yy}^2(y,z)dydz \leq \frac{s(t)}{2b} \int_0^1 v_y^2(y,0)dy$$

En términos de $u(x,t)$

Teorema 2.2 *La solución $u(x,t)$ del sistema (2.1) verifica las siguientes desigualdades*

$$\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx \leq \int_0^b u_0^2(x)dx$$
$$\int_0^t \frac{1}{s(z)} \int_0^{s(z)} u_x^2(x,z)dxdz \leq \frac{1}{2b}\int_0^b u_0^2(x)dx$$
$$\int_0^{s(t)} u_x^2(x,t)dx \leq \int_0^b u_x^2(x,0)dx$$
$$\int_0^t s(z) \int_0^{s(z)} u_{xx}^2(x,z)dxdz \leq \frac{s(t)}{2}\int_0^b u_x^2(x,0)dx$$

2.1. Demostración del Teorema 2.1

La demostración va a consistir en el estudio de la Ecuación del Calor en términos de $v(y,t)$

$$v_t(y,t) - \frac{1}{s(t)^2}v_{yy}(y,t) - \frac{s'(t)}{s(t)}yv_y(y,t) = 0 \tag{2.3}$$

Ecuación de la que sabemos que dada s posee una única solución [1, Capítulo 7]. Multipliquemos (2.3) por v

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}v^2(y,t) - \frac{1}{s^2}v(y,t)v_{yy}(y,t) - \frac{s'(t)}{s(t)}yv_y(y,t)v(y,t) = 0 \tag{2.4}$$

e integremos (2.4) respecto a y teniendo en cuenta la Regla de Leibniz

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 v^2(y,t)dy - \frac{1}{s^2}\left(vv_y\Big|_0^1 - \int_0^1 v_y^2(y,t)dy\right) - \frac{s'(t)}{s(t)}\frac{1}{2}\left(yv^2(y,t)\Big|_0^1 - \int_0^1 v^2(y,t)dy\right) = 0$$

Dado que $v(1,t) = v_y(0,t) = 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 v^2(y,t)dy + \frac{1}{s^2(t)}\int_0^1 v_y^2(y,t)dy + \frac{s'(t)}{s(t)}\frac{1}{2}\int_0^1 v^2(y,t)dy = 0 \tag{2.5}$$

Además, como

$$\frac{1}{s^2(t)}\int_0^1 v_y^2(y,t)dy > 0$$

podemos transformar (2.5) en la siguiente desigualdad

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 v^2(y,t)dy \leq -\frac{s'(t)}{s(t)}\int_0^1 v^2(y,t)dy$$

Aplicando la desigualdad de Grönwall y (1.11)

$$\int_0^1 v^2(y,t)dy \leq \exp\left(-\int_z^t \frac{s'(w)}{s(w)}dw\right)\int_0^1 v^2(y,z)dy = \frac{s(z)}{s(t)}\int_0^1 v^2(y,z)dy$$

Teniendo en cuenta que esta desigualdad se tiene para todo instante de tiempo si tomamos $z = 0$ llegamos a que

$$\int_0^1 v^2(y,t)dy \leq \frac{s(0)}{s(t)} \int_0^1 v^2(y,0)dy = \frac{b}{s(t)} \int_0^1 v^2(y,0)dy \tag{2.6}$$

con lo que queda demostrada la primera cota.
Ahora, integremos (2.5) respecto a t

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\int_0^1 v^2(y,t)dy - \frac{1}{2}\int_0^1 v^2(y,0)dy \\ &+ \int_0^t \frac{1}{s^2(z)} \int_0^1 v_y^2(y,z)dydz + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{s'(z)}{s(z)} \int_0^1 v^2(y,z)dydz \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dado que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 v^2(y,t)dy > 0$$

podemos transformar (2.7) en la siguiente desigualdad

$$\int_0^t \frac{1}{s^2(z)} \int_0^1 v_y^2(y,z)dydz \leq \frac{1}{2}\int_0^1 v^2(y,0)dy - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{s'(z)}{s(z)} \int_0^1 v^2(y,z)dydz$$

Asimismo como $s(t)$ es no decreciente por pertenecer a $\mathcal{O}$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{s'(z)}{s(z)} \int_0^1 v^2(y,z)dydz \leq 0$$

para todo y, t. Luego

$$\int_0^t \frac{1}{s^2(z)} \int_0^1 v_y^2(y,z)dydz \leq \frac{1}{2}\int_0^1 v^2(y,0)dy \tag{2.8}$$

con lo que queda demostrada la segunda de las cotas.

Ahora, vamos a seguir un procedimiento similar pero multiplicando (2.3) por $-v_{yy}$. De esta forma llegamos a la siguiente ecuación

$$-v_{yy}(y,t)\frac{\partial}{\partial t}v(y,t) + \frac{1}{s^2(t)}v_{yy}^2(y,t) + \frac{s'(t)}{s(t)}yv_y(y,t)v_{yy}(y,t) = 0 \tag{2.9}$$

Integrando (2.9) respecto a y teniendo en cuenta la Regla de Leibniz

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(vv_y\Big|_0^1 - \int_0^1 v_y^2(y,t)dy \right) + \frac{1}{s^2(t)}\int_0^1 v_{yy}^2(y,t)dy + \frac{s'(t)}{s(t)}\frac{1}{2}\left(yv_y^2\Big|_0^1 - \int_0^1 v_y^2(y,t)dy \right) = 0$$

Como $v_y(0,t) = v(1,t) = 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 v_y^2(y,t)dy + \frac{1}{s^2(t)}\int_0^1 v_{yy}^2(y,t)dy + \frac{s'(t)}{s(t)}\frac{1}{2}v_y^2(1,t) - \frac{s'(t)}{s(t)}\frac{1}{2}\int_0^1 v_y^2(y,t)dy = 0 \tag{2.10}$$

Dado que $s'(t) \geq 0$ por ser s no decreciente, se tiene que

$$\frac{1}{s^2(t)}\int_0^1 v_{yy}^2(y,t)dy + \frac{s'(t)}{s(t)}\frac{1}{2}v_y^2(1,t) \geq 0$$

Luego podemos transformar (2.10) en la siguiente desigualdad

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 v_y^2(y,t)dy \le \frac{s'(t)}{s(t)}\int_0^1 v_y^2(y,t)dy$$

Aplicando la Desigualdad de Grönwall y (1.11)

$$\int_0^1 v_y^2(y,t)dy \le \exp\left(\int_z^t \frac{s'(w)}{s(w)}dw\right)\int_0^1 v_y^2(y,z)dy = \frac{s(t)}{s(z)}\int_0^1 v_y^2(y,z)dy$$

Además, teniendo en cuenta que esta desigualdad se tiene para todo instante de tiempo podemos tomar $z=0$ llegando a que

$$\int_0^1 v_y^2(y,t)dy \le \frac{s(t)}{s(0)}\int_0^1 v_y^2(y,0)dy = \frac{s(t)}{b}\int_0^1 v_y^2(y,0)dy \tag{2.11}$$

con lo que queda demostrada la tercera de las cotas.
Ahora, integremos (2.10) respecto a t

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1 v_y^2(y,t)dy - \frac{1}{2}\int_0^1 v_y^2(y,0)dy + \int_0^t \frac{1}{s^2(z)}\int_0^1 v_{yy}^2(y,z)dydz \\ +\frac{1}{2}\int_0^t \frac{s'(z)}{s(z)}v_y^2(1,z)dz - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{s'(z)}{s(z)}\int_0^1 v_y^2(y,z)dydz = 0\end{aligned} \tag{2.12}$$

Dado que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 v_y^2(y,t)dy \ge 0 \qquad\qquad \frac{1}{2}\int_0^t \frac{s'(z)}{s(z)}v_y^2(1,z)dz \ge 0$$

podemos transformar (2.12) en la siguiente desigualdad

$$\int_0^t \frac{1}{s^2(z)}\int_0^1 v_{yy}^2(y,z)dydz \le \frac{1}{2}\int_0^1 v_y^2(y,0)dy + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{s'(z)}{s(z)}\int_0^1 v_y^2(y,z)dydz$$

Utilizando (2.11)

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{s^2(z)}\int_0^1 v_{yy}^2(y,z)dydz &\le \frac{1}{2}\int_0^1 v_y^2(y,0)dy + \frac{1}{2b}\int_0^1 v_y^2(y,0)dy\int_0^t s'(z)dz \\ &\le \int_0^1 v_y^2(y,0)dy\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2b}\left(s(t)-b\right)\right) \\ &\le \frac{s(t)}{2b}\int_0^1 v_y^2(y,0)dy\end{aligned} \tag{2.13}$$

En consecuencia, la última de las estimaciones del Teorema 2.1 queda demostrada.

Luego, $v(y,t)\in H^1=\{f\in L^2([0,1]) : f'\in L^2([0,1])\}$ ya que por (2.6) se tiene que $v(y,t)\in L^2([0,1])$ y por (2.11) que $v_y(y,t)\in L^2([0,1])$.

2.2. Demostración del Teorema 2.2

Las estimaciones que hemos demostrado en la Sección 2.1 para v son válidas para u deshaciendo el cambio de variable. Esto se debe a que, tal como hemos explicado, los sistemas de EDP's de los que son solución son el mismo teniendo en cuenta el cambio de variable. Por lo tanto, para demostrar el Teorema 2.2 debemos ver que al realizar el cambio de variable $y = \frac{x}{s(t)}$ en las estimaciones del Teorema 2.1 se tienen las del Teorema 2.2.
Para empezar, sabemos que

$$v(y,t) = u(ys(t),t) \qquad\qquad dy = \frac{dx}{s(t)} \tag{2.14}$$

Por lo que

$$\int_0^1 v^2(y,t)dy = \frac{1}{s(t)}\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx \tag{2.15}$$

Luego utilizando (2.6) y (2.15)

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(t)}\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx &\leq \frac{b}{s(t)}\int_0^b u_0^2(x)\frac{1}{b}dx\\ &\leq \frac{1}{s(t)}\int_0^b u_0^2(x)dx\end{aligned}$$

Despejando

$$\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx \leq \int_0^b u_0^2(x)dx$$

probamos la primera de las estimaciones.
Además, a consecuencia de (2.14)

$$v_y(y,t) = s(t)u_x(x,t)$$

por lo que

$$\int_0^1 v_y^2(y,t)dy = \int_0^{s(t)} s^2(t)u_x^2(x,t)\frac{1}{s(t)}dx = s(t)\int_0^{s(t)} u_x^2(x,t)dx \tag{2.16}$$

Haciendo uso de (2.11) y de (2.16)

$$\begin{aligned}s(t)\int_0^{s(t)} u_x^2(x,t)dx &\leq \frac{s(t)}{b}\int_0^b b^2u_x^2(x,0)\frac{1}{b}dx\\ &\leq s(t)\int_0^b u_x^2(x,0)dx\end{aligned}$$

Despejando vemos que la tercera de las estimaciones también se cumple

$$\int_0^{s(t)} u_x^2(x,t)dx \leq \int_0^b u_x^2(x,0)dx$$

Por otro lado, a partir de (2.16) se tiene que

$$\int_0^t \frac{1}{s^2(z)}\int_0^1 v_y^2(y,z)dydz = \int_0^t \frac{1}{s(z)}\int_0^{s(t)} u_x^2(x,z)dxdz \tag{2.17}$$

Utilizando (2.8), (2.15) y (2.17) demostramos la segunda de las cotas

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{s(z)} \int_0^{s(t)} u_x^2(x,z)dxdz &\leq \frac{1}{2}\int_0^b u_0^2(x)\frac{1}{b}dx \\ &\leq \frac{1}{2b}\int_0^b u_0^2(x)dx\end{aligned}$$

Por último, se tiene que

$$v_{yy}(y,t) = s^2(t)u_{xx}(x,t)$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{s^2(z)} \int_0^1 v_{yy}^2(y,z)dydz &= \int_0^t \frac{1}{s^2(z)} \int_0^{s(z)} s^4(z)u_{xx}^2(x,z)\frac{1}{s(z)}dxdz \\ &= \int_0^t s(z) \int_0^{s(z)} u_{xx}^2(x,z)dxdz\end{aligned} \tag{2.18}$$

Por lo tanto, utilizando (2.13), (2.16) y (2.18)

$$\begin{aligned}\int_0^t s(z) \int_0^{s(z)} u_{xx}^2(x,z)dxdz &\leq \frac{s(t)}{2b}\int_0^b bu_x^2(x,0)dx \\ &\leq \frac{s(t)}{2}\int_0^b u_x^2(x,0)dx\end{aligned}$$

Por lo que queda demostrada la última de las estimaciones.

Capítulo 3

Existencia global de solución

En el Capítulo 1 hemos demostrado que el sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}s(t) = -u_x(s(t),t) \text{ en } [0,T] \\ u_t - u_{xx} = 0 \text{ en } (0,s(t)) \times [0,T] \\ s(0) = b > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 \text{ en } [0,s(t)] \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(s(t),t) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

posee una única solución local en tiempo. Sin embargo, ahora estamos en disposición de demostrar que realmente esta solución es global. En concreto vamos a probar que

Teorema 3.1 *Bajo las hipótesis del Teorema 1.1 la solución del sistema* (3.1) *es global y, además,*

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = b + \int_0^b u_0(x)dx$$

3.1. Demostración del Teorema

La demostración consiste en probar que tanto $s(t)$ como $u(x,t)$ se comportan de una forma regular para tiempos superiores a $T = \frac{15b^2}{2}$ y que, en consecuencia, siguen siendo solución de (3.1). Por un lado, veremos que cuando t tiende a infinito la función $u(x,t)$, es decir, la distribución de temperatura, tiende a cero y, por otro, que $s(t)$ converge a

$$b + \int_0^b u_0(x)dx$$

Para empezar, debemos probar dos Proposiciones

Proposición 3.1 *Sea* (s,u) *solución de* (3.1). *Entonces*

$$\int_0^{s(t)} u(x,t)dx + s(t) = \int_0^b u_0(x)dx + b$$

Además, usando la positividad de $u(x,t)$

$$\limsup_{t\to\infty} s(t) \leq \int_0^b u_0(x)dx + b$$

Dem: Por la Regla de Leibniz sabemos que

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} u(x,t)dx = u(s(t),t)s'(t) - u(0,t)\frac{\partial}{\partial t}0 + \int_0^{s(t)} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)dx$$

Dado que $u(s(t),t) = 0$

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} u(x,t)dx = \int_0^{s(t)} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)dx$$

Además, como

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial^2 x}u(x,t) \tag{3.2}$$

se tiene que

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} u(x,t)dx = \int_0^{s(t)} u_{xx}(x,t)dx = u_x(s(t),t) - u_x(0,t)$$

Sabemos que

$$u_x(x,0) = 0 \qquad\qquad u_x(s(t),t) = -\frac{d}{dt}s(t)$$

De donde

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} u(x,t)dx + \frac{d}{dt}s(t) = 0 \tag{3.3}$$

Integrando (3.3) respecto a t

$$\int_0^{s(t)} u(x,t)dx + s(t) = \int_0^{b} u_0(x)dx + b \tag{3.4}$$

Con lo que queda demostrada la primera parte de la Proposición.
Para probar la segunda parte debemos tener en cuenta que por el Principio de Comparación $u(x,t) \geq 0$. Entonces por (3.4)

$$s(t) \leq \int_0^{b} u_0(x)dx + b \tag{3.5}$$

Tomando límites

$$\limsup_{t\to\infty} s(t) \leq \int_0^{b} u_0(x) + b$$

Proposición 3.2 *Sea* (s,u) *solución de* (3.1). *Entonces*

$$\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx + 2\int_0^{t}\int_0^{s(z)} u_x^2(x,z)dxdz = \int_0^{b} u_0^2(x)dx$$

y

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{s(t)} u(x,t)dx = 0$$

Dem: El Teorema (2.2) ya nos da una cota para la norma L^2 de $u(x,t)$. Sin embargo, en la demostración de este Teorema utilizábamos la Ecuación del Calor en términos de $v(y,t)$ y, ahora, vamos a utilizar la propia ecuación para u en el dominio $(0, s(t))$ que depende del tiempo. De esta manera calcularemos una ecuación de balance de energía directamente para $u(x,t)$.
Por la Regla de Leibniz se tiene que

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx = u^2(s(t),t)s'(t) - u^2(0,t)\frac{\partial}{\partial t}0 + \int_0^{s(t)} \frac{\partial}{\partial t}u^2(x,t)dx \tag{3.6}$$

Utilizando que

$$\frac{\partial}{\partial t}u^2(x,t) = 2u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$$

podemos escribir (3.6) como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx = \frac{1}{2}u^2(s(t),t)s'(t) - \frac{1}{2}u^2(0,t)\frac{\partial}{\partial t}0 + \int_0^{s(t)} u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)dx$$

Además, haciendo uso de (3.2) y teniendo en cuenta que $u^2(s(t),t) = 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx = \int_0^{s(t)} u(x,t)u_{xx}(x,t)dx \tag{3.7}$$

Integrando por partes en (3.7) y teniendo en cuenta que $u(s(t),t) = 0$ y que $u_x(0,t) = 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx &= u(x,t)u_x(x,t)\Big|_0^{s(t)} - \int_0^{s(t)} u_x^2(x,t)dx \\ &= -\int_0^{s(t)} u_x^2(x,t)dx\end{aligned}$$

De donde

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx + \int_0^{s(t)} u_x^2(x,t)dx = 0 \tag{3.8}$$

Integrando respecto a t en (3.8)

$$\frac{1}{2}\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx - \frac{1}{2}\int_0^{b} u_0^2(x)dx + \int_0^{t}\int_0^{s(z)} u_x^2(x,z)dxdz = 0$$

Luego

$$\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx + 2\int_0^{t}\int_0^{s(z)} u_x^2(x,z)dxdz = \int_0^{b} u_0^2(x)dx$$

con lo que hemos hallado la ecuación de balance de energía de $u(x,t)$ y la primera parte de la Proposición queda demostrada.
Por otro lado, se tiene que

$$u(x,t) = u(x,t) - u(s(t),t)$$

Por tanto,

$$u(x,t) = \int_{s(t)}^{x} u_x(y,t)dy = -\int_x^{s(t)} u_x(y,t)dy$$

Tomando valores absolutos

$$u(x,t) \leq \left| \int_x^{s(t)} u_x(y,t)dy \right| \leq \int_x^{s(t)} |u_x(y,t)|\, dy \tag{3.9}$$

Utilizando (3.9) y la positividad de $|u_x(y,t)|$ se tiene la siguiente Desigualdad de Sobolev

$$u(x,t) \leq \int_0^{s(t)} |u_x(y,t)|\, dy \tag{3.10}$$

Elevando al cuadrado en (3.10)

$$u^2(x,t) \leq \left(\int_0^{s(t)} |u_x(y,t)|\, dy \right)^2 \tag{3.11}$$

Además, haciendo uso de la Desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} |u_x(y,t)|\, dy &\leq \sqrt{\int_0^{s(t)} u_x^2(y,t)dy} \sqrt{\int_0^{s(t)} dy} \\ &\leq \sqrt{s(t)} \sqrt{\int_0^{s(t)} u_x^2(y,t)dy} \end{aligned}$$

Luego, utilizando esta cota en (3.11) llegamos a que

$$\begin{aligned} u^2(x,t) &\leq \left(\sqrt{s(t)} \sqrt{\int_0^{s(t)} u_x^2(y,t)dy} \right)^2 \\ &\leq s(t) \int_0^{s(t)} u_x^2(y,t)dy \end{aligned}$$

Por tanto, hemos obtenido la siguiente desigualdad puntual

$$\frac{1}{s(t)} u^2(x,t) \leq \int_0^{s(t)} u_x^2(y,t)dy \tag{3.12}$$

Integrando respecto a x en (3.12) se llega a la siguiente desigualdad de Poincaré

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(t)} \int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx &\leq \int_0^{s(t)} \int_0^{s(t)} u_x^2(y,t)dydx \\ &\leq s(t) \int_0^{s(t)} u_x^2(y,t)dy \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{s^2(t)} \int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx \leq \int_0^{s(t)} u_x^2(y,t)dy \tag{3.13}$$

Además, por (3.5) se tiene que

$$\frac{1}{s^2(t)} \geq \frac{1}{\left(b + \int_0^b u_0(x)dx \right)^2}$$

por lo que

$$\frac{1}{\left(b+\int_0^b u_0(x)dx\right)^2}\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx \leq \frac{1}{s^2(t)}\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx$$

Entonces, por (3.13)

$$\frac{1}{\left(b+\int_0^b u_0(x)dx\right)^2}\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx \leq \int_0^{s(t)} u_x^2(y,t)dy$$

Volviendo a (3.8) y utilizando esta cota

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx \leq -\frac{2}{\left(b+\int_0^b u_0(x)dx\right)^2}\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx$$

Aplicando la Desigualdad de Grönwall

$$\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx \leq \exp\left(-\int_z^t \frac{2}{\left(b+\int_0^b u_0(x)dx\right)^2}dw\right)\int_0^{s(z)} u^2(x,z)dx$$

Tomando $z=0$

$$\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx \leq \exp\left(-t\frac{2}{\left(b+\int_0^b u_0(x)dx\right)^2}\right)\int_0^b u_0^2(x)dx \tag{3.14}$$

Por otro lado, por la Desigualdad de Hölder

$$\int_0^{s(t)} u(x,t)dx \leq \sqrt{s(t)}\sqrt{\int_0^{s(t)} u^2(x,t)dx}$$

Haciendo uso de (3.5) y (3.14)

$$\int_0^{s(t)} u(x,t)dx \leq \sqrt{\exp\left(-t\frac{2}{\left(b+\int_0^b u_0(x)dx\right)^2}\right)\int_0^b u_0^2(x)dx}\sqrt{b+\int_0^b u_0(x)dx}$$

Luego

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{s(t)} u(x,t)dx \leq \lim_{t\to\infty}\sqrt{\exp\left(-t\frac{2}{\left(b+\int_0^b u_0(x)dx\right)^2}\right)\int_0^b u_0^2(x)dx}\sqrt{b+\int_0^b u_0(x)dx} = 0$$

Por tanto, por la Regla del Sandwich

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{s(t)} u(x,t)dx = 0 \tag{3.15}$$

Por consiguiente, para tiempos grandes $u(x,t)$ está cerca de cero. Es decir, $u(x,t)$ decae en tiempo cuando t tiende a infinito.

Por ser $s(t)$ una función continua, sabemos que no tiene saltos. Sin embargo, sí puede oscilar como hacen, por ejemplo, las funciones del seno y del coseno. No obstante, por la Proposición 3.2 sabemos que $u(x,t)$ no oscila sino que decae para tiempos grandes por lo que $s(t)$ tampoco puede oscilar ya que por la Proposición 3.1

$$\int_0^{s(t)} u(x,t)dx + s(t) = \int_0^b u_0(x)dx + b$$

Además, por esta misma ecuación se tiene que

$$s(t) = b + \int_0^b u_0(x)dx - \int_0^{s(t)} u(x,t)dx$$

Tomando límites y utilizando (3.15)

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} s(t) &= \lim_{t\to\infty} \left(b + \int_0^b u_0(x)dx - \int_0^{s(t)} u(x,t)dx \right) \\ &= b + \int_0^b u_0(x)dx \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el Teorema.

Bibliografía

[1] Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations* (Vol. 19). American Mathematical Soc.

[2] Andreucci, D. (2004). Lecture notes on the Stefan problem. *Lecture notes, Universitá da Roma la Sapienza, Italy.*

[3] Hadžić, M., & Shkoller, S. (2015). Global stability and decay for the classical Stefan problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 68(5), 689-757.

[4] Rubinšteĭn, L. I. (2000). *The stefan problem* (Vol. 8). American Mathematical Soc.

[5] Lamé, G., & Clapeyron, B. P. (1831). Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide. In *Annales Chimie Physique* (Vol. 47, pp. 250-256).

[6] Solonnikov, V. A., & Frolova, E. V. (1997). L_p-theory of the Stefan problem. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 243, 299-323.